

Harun Cetin

Montessori Scholen Amsterdam  
h.cetin@msa.nl

Robert Kooij

iTrust Centre for Research in Cyber Security,  
Singapore University of Technology and Design, and  
Faculteit EWI, Technische Universiteit Delft  
r.e.kooij@tudelft.nl

## Onderwijs

# Wiskunde als complex netwerk

Het NWO-programma *Wiskundeleraar in Onderzoek* stelt eerstegraads wiskundeleraars in staat om naast hun reguliere onderwijsfunctie zes tot twaalf maanden een dag per week onderzoek te doen bij een universitaire afdeling. In dit kader hebben Harun Cetin en Robert Kooij het project ‘Wiskunde als complex netwerk’ uitgevoerd aan de TU Delft. Hierbij hebben zij zich gericht op het ontwikkelen van een semantisch netwerkmodel voor wiskundige kennis, met als use case het vwo-vak wiskunde A (examenjaar 2018). Zij laten zien hoe de specifiek-toetsbare leerdoelen gebruikt kunnen worden om een netwerkstructuur van concepten en begrippen te construeren. Vervolgens hebben zij het verkregen netwerk geanalyseerd en geclassificeerd als *small-world* en *scale-free*. Het *small-world*-effect kenmerkt zich door een hoge clusteringcoëfficiënt en kleine gemiddelde kortste padlengte, terwijl het *scale-free*-effect verwijst naar het voorkomen van enkele knopen met veel verbindingen en heel veel knopen met relatief weinig verbindingen. Als laatste demonstreren zij hoe een dergelijk netwerkmodel gebruikt kan worden om de effectiviteit van verschillende leerstrategieën te kwantificeren. Hierbij leggen zij de nadruk op de relatie tussen de zogenaamde *netwerkcentraliteit* van een leereenheid/knoop en zijn *context*. Zij hebben aangetoond dat het verwerven van nieuwe kennis sneller gaat, wanneer de volgende leereenheid van de leerroede wordt bepaald op basis van zijn centraliteit ten opzichte van de zogenaamde *groepsstructuur* van het netwerk.

Netwerken zijn overal. Internet, sociale netwerken, transportnetwerken, energienetwerken, biologische- en semantische netwerken zijn daar slechts enkele voorbeelden van. Deze netwerken zijn niet random; ze worden *complex* genoemd, omdat ze eigenschappen vertonen die niet voorkomen in volledig reguliere en volledig willekeurige netwerken [18]. Omdat de structuur van deze complexe netwerken altijd de functie ervan beïnvloedt, bestaat er binnen allerlei gebieden van de wetenschap een behoefte om de structuur van deze netwerken te begrijpen en te karakteriseren [11].

Onderwijs is ook niet los te zien van deze wereld van netwerken. In het onderwijsveld is er een groot scala aan onderwijsparadigma's waarin een centrale rol is weggelegd voor het opsporen en het

karakteriseren van relaties: curriculaire samenhang binnen vakken en tussen vakken, doorlopende leerlijnen per vak of leergebied [7], de koppeling van de individuele leeropbrengsten van de leerstof voor gedifferentieerd en adaptief onderwijs. Netwerken beginnen de rol van traditionele tabellen, schema's en syllabi over te nemen. Netwerken zijn wiskundige objecten, die niet alleen helpen om attributen en relaties binnen het onderwijs in kaart te brengen, maar deze ook te kunnen kwantificeren [21].

Dit artikel presenteert een semantisch netwerkmodel voor wiskundige kennis, met als use case het vwo-vak wiskunde A (examenjaar 2018). De interesse in semantische netwerken als kennismodel is aanzienlijk toegenomen met de recente ontwikkelingen binnen de netwerkwetenschap [4, 14].

Semantische netwerken worden gedefinieerd als “een onderling verbonden reeks entiteiten die betekenis dragen”, waarbij elke entiteit/knoop overeenkomt met een woord (of begrip) [3]. De knopen worden met elkaar verbonden door de relaties en associaties tussen de woorden. Er zijn verschillende manieren om dergelijke verbanden te definiëren [4].

In dit artikel gebruiken we de specifiek-toetsbare leerdoelen van het wiskundeonderwijs om de knopen en de associaties te bepalen. Voor de use case wiskunde A demonstreren we ook hoe een dergelijk netwerkmodel gebruikt kan worden om de effectiviteit van verschillende leerstrategieën te kwantificeren.

## Modelleren wiskundekennis als netwerk

In het wiskundeonderwijs worden de manieren van wiskundig denken gestimuleerd, met aandacht voor het opbouwen van betekenisrijke, samenhangende cognitieve schema's. Over het algemeen worden cognitieve schema's omschreven als een netwerk van kennis en vaardigheden. In wiskundendidactiek wordt soms ook het begrip ‘relatienetwerk’ gebruikt om naar cognitieve schema's te verwijzen. In de ontwikkeling van een cognitief schema wordt het maken van een kennisgraaf gezien als de eerste stap voor de structurering (kennis in kaart brengen). In zo'n kennisgraaf (mindmap, conceptmap) krijgen verschillende aspecten van het onderwerp een plaats [6].

Het concept ‘netwerk’ in de vakdidactiek roept echter twijfels op vanuit een netwerktheoretisch oogpunt. Volgens de wiskundendidactici moeten de centrale con-

cepten het fundament vormen van de cognitieve schema's zodat op die manier de samenhang wordt gegarandeerd tussen de kennisgrafen die als functionele eenheden dienen van het uiteindelijke netwerk [5, 16]. Volgens de netwerktheorie is het echter zo dat de belangrijkheid, oftewel de centraliteit van een knoop binnen een netwerk, afhankelijk is van het hele patroon van verbindingen [12]. De gebruikelijke aanpak in netwerktheorie is daarom om de centraliteiten van knopen te bepalen zodra de netwerkstructuur in zijn geheel te voorschijn komt. Het zal op zijn best speculatief zijn om vooraf te vertellen hoe centraal een concept staat. In het verlengde hiervan is het belangrijk op te merken dat men ook niet stilstaat bij de onderlinge relaties tussen de kennisgrafen van alle wiskundedomeinen tezamen. Zo'n concept van 'het netwerk van de netwerken' of een concept dat hierop lijkt, komt immers niet nadrukkelijk naar voren in de literatuur van de vakdidactiek. In plaats daarvan beoogt men steeds een rijk cognitief schema van kennisgrafen rondom een bepaald domein, bijvoorbeeld meetkunde. De links tussen de kennisgrafen van verschillende domeinen kunnen echter zeer interessant zijn, qua lokale en globale eigenschappen van het netwerk. Een voorbeeld hiervan is de cirkel, die zowel in vlakke meetkunde als in goniometrie een 'centrale' plaats inneemt.

Hierbij stellen we daarom een neutrale aanpak voor de netwerkconstructie voor, die niet uitgaat van een bepaalde a priori-aanname over hoe centraal de knopen zijn. Als gevolg hiervan kunnen niet alleen de centraliteiten maar ook overige eigenschappen van het netwerk als zelfoptredende verschijnselen verder bestudeerd worden.

Een andere kritiek op de traditionele kennisgrafen kan zijn dat de kennis die ze dragen niet per se specifiek-toetsbaar is. De rationale achter de woordassociaties met het *centraal concept* is namelijk niet bekend. Daarom hebben wij in dit onderzoek gebruikgemaakt van de specificaties die door het College voor Toetsen en Examen (CvTE) in Nederland zijn vastgelegd om de exameneisen te beschrijven. Een specificatie brengt verschillende items (concepten, begrippen, feiten, formules) met elkaar in verband. In dit onderzoek hebben we ons beperkt tot de specificaties van het vwo-vak wiskunde A die in de vorm van een syllabus zijn gepubliceerd voor het examenjaar 2018 [1].

In het wiskundige kennisnetwerk dat we hebben gevormd, correspondeert iedere knoop met een item van een specificatie. Doordat de items van een specificatie samen de noodzakelijke ingrediënten van hetzelfde leerdoel zijn, zijn ze onderling met elkaar verbonden in de vorm van een ongerichte volledige subgraaf, een zogenaamde klik. Onze aanpak hierbij is geïnspireerd door [9], waarin een semantisch netwerk wordt gevormd van de trefwoorden in titels van wetenschappelijke artikels over wiskundeonderwijs. Ons netwerkmodel is ook een soort semantisch netwerk waarbij de voorwaarde om verbonden te zijn is dat items samen in een specificatie voorkomen. Een specificatie in onze aanpak is dus analoog met een titel in de aanpak van [9].

### Toepassing op wiskunde A

Om het totale netwerk te bouwen uit de specificaties van wiskunde A, zijn de volgende stappen gevolgd: (1) de identificatie van de knopen in de databron (syllabus);

(2) het importeren van de knopen/items van elke specificatie van de syllabus naar NetworkX, zodat elke specificatie een klik wordt; (3) het opbouwen van de volledige kennisgraaf met behulp van NetworkX, op basis van het toepassen van stap 2 voor alle specificaties. (NetworkX is een Python library voor de analyse en visualisatie van grafen en netwerken.)

Als voorbeeld bekijken we de volgende drie specificaties:

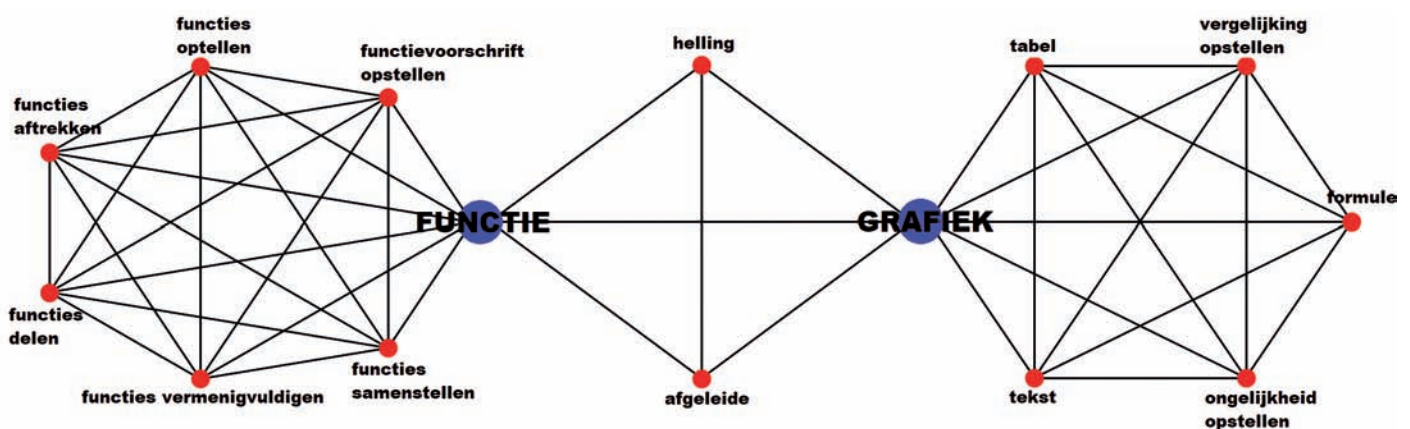
*Specificatie 1.* Productieve vaardigheden 7: De kandidaat kan een vergelijking of een ongelijkheid opstellen aan de hand van een tabel, formule, grafiek of tekst.

*Specificatie 2.* Productieve vaardigheden 10: De kandidaat kan functievoorschriften opstellen door twee functies op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen, te delen of samen te stellen.

*Specificatie 3.* Parate vaardigheden 4: De kandidaat kan een verband leggen tussen de afgeleide van een functie en de helling van de grafiek van die functie in een gegeven punt van de grafiek.

De eerste twee specificaties zijn afkomstig uit Subdomein C2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden. De derde specificatie komt uit Subdomein D3: Afgeleide.

Volgens de bovenbeschreven aanpak resulteert elk van deze specificaties in een ongerichte volledige subgraaf in de vorm van een klik. Figuur 1 laat de samengestelde kennisgraaf zien die ontstaat als gevolg van samenvoeging van de drie kliks. Specificaties 1 and 2 corresponderen met respectievelijk de linker- en de rechterklik. De middelste klik komt overeen met de derde specificatie.



Figuur 1 Kennisgraaf op basis van drie specificaties.

De kennisgraaf is slechts gebaseerd op drie specificaties en is dus nog verre van compleet. Zo is de knoop ‘formule’ eigenlijk via een andere specificatie rechtstreeks verbonden met de knoop ‘functie’. Indien we alle specificaties gebruiken voor de samengestelde kennisgraaf voor wiskunde A, krijgen we een complex netwerk, zie Figuur 2. Een complex netwerk zoals in Figuur 2 is een wiskundig object dat gepresenteerd kan worden als een graaf  $G(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ , waarbij  $\mathcal{N}$  een verzameling van  $|\mathcal{N}| = N$  knopen is en  $\mathcal{L}$  een verzameling van  $|\mathcal{L}| = L$  verbindingen. De theorie van complexe netwerken is namelijk oorspronkelijk uit de grafentheorie ontstaan. De focus van deze nieuwe theorie ligt echter op de analyse van de statistische eigenschappen van netwerken zoals linkdichtheid, gradenverdeling, gemiddelde padlengte, enzovoort [2]. In deze sectie bepalen we dergelijke eigenschappen voor het wiskunde A-netwerk.

Een verbonden component van een ongerichte graaf is een subgraaf waarin elke twee knopen met elkaar zijn verbonden via een pad en die niet verbonden is met overige knopen in de gehele graaf. We geven het totaal aantal verbonden componenten aan als  $V$ . In een netwerk kunnen er knopen zijn waarvan het verwijderen het aantal verbonden componenten doet toenemen. Deze knopen heten cutpoints. Het aantal cutpoints  $N_{\text{cut}}$  is dus een indicatie voor de fragiliteit voor wat betreft de verbondenheid van het netwerk. We geven het aantal verbonden componenten dat overblijft na het verwijderen van de  $N_{\text{cut}}$  cutpoints aan als  $V_{\text{cut}}$ .

Het aantal buurknopen waarmee een knoop  $i$  rechtstreeks verbonden is, heet de graad  $d_i$  van knoop  $i$ . De uitdrukking

$$E[d] = \frac{1}{N} \sum_i d_i$$

geeft de gemiddelde graad per knoop. De linkdichtheid

$$S = \frac{2L}{N(N-1)}$$

is gedefinieerd als de verhouding van het aantal bestaande verbindingen  $L$  tot het maximaal mogelijke aantal verbindingen in het netwerk. De clusteringcoëfficiënt

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_i C_i$$

is de gemiddelde clustering van alle knopen waarbij de clustering



Figuur 2 Wiskunde A-netwerk.

$$C_i = \frac{2L_i}{d_i(d_i-1)}$$

van een knoop  $i$  de verhouding aangeeft van het aantal bestaande verbindingen  $L_i$  tussen de buurknopen van knoop  $i$  tot het maximaal mogelijke aantal verbindingen tussen deze buurknopen. Een andere netwerkgraagtheid is de gemiddelde kortste padlengte

$$\bar{l} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} l_{ij}$$

waarbij  $l_{ij}$  de kortste padlengte is tussen de knopen  $i$  en  $j$ . Strikt genomen is de gemiddelde kortste padlengte alleen gedefinieerd voor verbonden netwerken.

Tabel 1 geeft een overzicht van de eigenschappen van het wiskunde A-netwerk. Omdat het gehele netwerk verbonden is ( $V = 1$ ) is de gemiddelde kortste padlengte goed gedefinieerd.

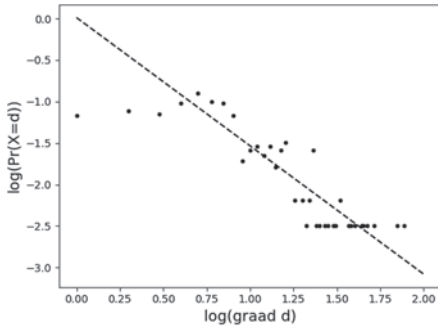
Het is bekend dat complexe netwerken een aantal niet-triviale structurele eigenschappen bezitten, zoals het small-world-effect en het scale-free-effect, die niet

voorkomen in random netwerkenmodellen zoals het Erdős–Rényi-model [2]. Een small-world-netwerk karakteriseert zich door een hoge clusteringcoëfficiënt en kleine gemiddelde kortste padlengte. Hiertoe wordt het netwerk  $G(N, L)$  vergeleken met random netwerken met dezelfde  $N$ - en  $L$ -waarden. Voor een small-world-netwerk geldt:  $\bar{C} \gg \bar{C}_{\text{random}}$  en  $\bar{l} \geq \bar{l}_{\text{random}}$  [19]. Het verkregen wiskunde A-netwerk met  $\bar{C} = 0,74$  en  $\bar{l} = 3,28$  wordt daarom gekarakteriseerd als small-world, aangezien de bijbehorende random netwerken met  $N = 312$  en  $L = 1402$  resulteren in  $0,020 \leq \bar{C}_{\text{random}} \leq 0,038$  en  $2,83 \leq \bar{l}_{\text{random}} \leq 2,86$ . De resultaten zijn gebaseerd op de realisatie van duizend random netwerken.

Het scale-free-effect kenmerkt zich door het voorkomen van enkele knopen met veel verbindingen en heel veel knopen met relatief weinig verbindingen. Wiskundig gezien komt dat overeen met een gradenverdeling waarbij de kans op knopen met hoge graden afneemt volgens een machtsverband in de vorm van  $\Pr(X = d) \sim d^{-\gamma}$

Symbol	Grootheid	Waarde
$N$	Aantal knopen	312
$L$	Aantal links	1402
$V$	Aantal verbonden componenten	1
$N_{\text{cut}}$	Aantal cutpoints	21
$V_{\text{cut}}$	Aantal componenten na verwijderen cutpoints	44
$E[d]$	Gemiddelde graad	8,99
$S$	Linkdichtheid	0,03
$\bar{C}$	Clusteringcoëfficiënt	0,74
$\bar{l}$	Gemiddelde kortste padlengte	3,28
$\gamma$	Macht gradenverdeling	1,55

Tabel 1 Eigenschappen van het wiskunde A-netwerk.



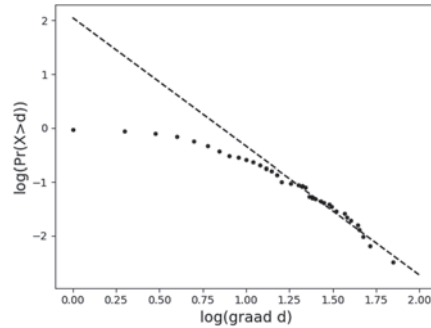
**Figuur 3** Log-log-plot van de gradenverdeling van het wiskunde A- netwerk.

waarbij  $\gamma$  de macht is van de gradenverdeling [2]. Dit machtsverband, ook wel *power law* genoemd, toont zich als een rechte lijn op een dubbel logaritmische schaal. Naast de gradenverdeling, wordt ook vaak gebruikgemaakt van de cumulatieve gradenverdeling  $\Pr(X > d)$ . Deze verdeling beperkt de ruis als gevolg van de statistische afwijkingen bij hoge graden. Figuren 3 en 4 laten zien dat de gradenverdeling van het wiskunde A-netwerk een power law volgt. Het wiskunde A-netwerk is dus een scale-free netwerk.

### Leerprocessen op netwerken

Zoals eerder beschreven, speelt het identificeren van centrale concepten in kennisstructuren een cruciale rol in de vakdidactiek. Het semantische netwerkmodel dat in de vorige paragraaf is geïntroduceerd, kan gebruikt worden om de belangrijkheid, oftewel centraliteit, van een knoop/concept te kwantificeren. Wat de centraliteit van een knoop hierbij precies inhoudt, heeft te maken met de achterliggende wiskundige formulering. Zo kan een dergelijke formulering betrekking hebben op het aantal buurknopen van de knoop  $i$  (*graad-centraliteit*), het aantal kortste paden dat door de knoop  $i$  loopt (*betweenness-centraliteit*), de som van de inverse padlengtes, oftewel de afstanden vanaf de knoop  $i$  naar alle overige knopen in het netwerk (*closeness-centraliteit*), het  $i$ -de element van de eigenvector behorend bij de grootste eigenwaarde van de verbindingsmatrix (*eigenvector-centraliteit*), enzovoort. Van deze vier basismetrieën is de graad-centraliteit het meest eenvoudig te bepalen.

In het kader van adaptief en gepersonaliseerd leren heeft [20] deze vier basismetrieën onderzocht naar hun geschiktheid om de 'belangrijkheid' van de concepten uit te drukken. Hiervoor is er gebruikgemaakt



**Figuur 4** Log-log-plot van de cumulatieve gradenverdeling van het wiskunde A-netwerk.

van een semantische graaf van concepten behorende tot het universitaire vak Management Information Systems. In het onderzoek is er onder 247 studenten gekeken naar de leeropbrengst als gevolg van het selecteren van het 'volgende concept' gebaseerd op de netwerkcentraliteit. Door antwoord te geven op de in totaal 165 gestelde vragen doorloopt elke student een leerroute van 61 verschillende concepten/knopen. Hierbij wordt geconcludeerd dat een hogere centraliteit voor een gegeven knoop een rol kan spelen bij het voorspellen van de volgende knoop in de leerroute. Het is echter niet eenduidig welke centraliteitsmetriek (of combinatie van de metrieken) de grootste voorspellende waarde heeft.

Op basis van de graad-centraliteit hebben Rodi e.a. [15] laten zien dat zwak-verbonden knopen, dat wil zeggen knopen met een lage graad, een belangrijke rol kunnen spelen in het leerproces. Volgens het door hen ontwikkelde framework zorgen de kennisstructuren die scale-free en small-world zijn ervoor dat de verworven kennis duurzamer wordt en het leerproces sneller verloopt. Hierbij wordt als *context* van de knopen hun directe omgeving (dat wil zeggen de buurknopen) aangenomen.

In dit onderzoek hebben we het leermodel van [15] toegepast op ons wiskunde A-netwerk met een uitbreiding van het kader: we herdefiniëren de *context* van een knoop  $i$  aan de hand van de informatie over de zogenaamde *groepen* waartoe de buurknopen van de knoop  $i$  behoren. Net als het scale-free-effect en small-world-effect is het voorkomen van groepen knopen in vele complexe netwerken algemeen aangetroffen. Groepen in een netwerk zijn structuren die intern dichter zijn verbonden dan met de rest van het netwerk [17]. Het nadeel van het definiëren van context aan de hand van de graad-centraliteit is name-

lijk dat de buurknopen gelijk worden behandeld: een knoop  $j$  met drie buurknopen die allemaal in dezelfde groep zitten, heeft duidelijk een andere status dan een knoop  $i$  waarvan (een deel van) de drie buurknopen zich in verschillende groepen bevinden. Het identificeren van de groepen knopen kent vele heuristieken en methoden. In dit werk gebruiken we de zogenaamde *Q-modulariteit*, één van de eerste en bekendste methoden om de groepsstructuur in complexe netwerken te vinden (zie kader op de volgende pagina).

In het leermodel van [15] doorloopt een hypothetische leerling een opgegeven leerroute/leerplan van de leereenheden/knopen. De leerroute kan volgens een bepaalde strategie worden samengesteld: bijvoorbeeld via een random selectie volgens een uniforme kansverdeling. Tegelijkertijd is er een stochastisch proces gaande dat een subtiel evenwicht impliceert tussen de introductie van nieuwe leereenheden en de herhaling van de oude leereenheden. Op elk discreet tijdstip  $t$  is er steeds sprake van één van de volgende events: (a) de hypothetische leerling boekt vooruitgang en krijgt een nieuwe leereenheid aangeboden die nog nooit eerder geïntroduceerd is; (b) een al eerder geïntroduceerde leereenheid wordt *te vroeg* herhaald; (c) een al eerder geïntroduceerde leereenheid wordt *op tijd* herhaald; (d) een al eerder geïntroduceerde leereenheid wordt *te laat* herhaald, waardoor het vergeten wordt; (e) de leerling haalt een vergeten leereenheid weer op. Door de mislukkingen in het leerproces (dat wil zeggen inefficiënt herhalen, vergeten) verloopt het leren trager. Het aantal afzonderlijke leereenheden  $n(t)$  dat per tijdstip  $t$  geïntroduceerd (en nog niet vergeten) is, is daarom een indicatie voor de efficiëntie van het leerproces. De hypothetische leerling gaat door totdat alle  $N$  leereenheden/knopen beklijven. De tijd  $t_N$  die hiervoor nodig is, heet de *dekkingsstijd* (dat wil zeggen  $n(t_N) = N$ ). In de volgende paragraaf gebruiken we  $n(t)$  en  $t_N$  als simulatieparameters om de efficiëntie van het leerproces te evalueren dat uitgaat van de groepsstructuur als context van de leereenheden.

Het leer algoritme in dit framework is gebaseerd op een klassiek werk van Ebbinghaus (1885) over het zogenaamde spacing- en lag-effect. Het spacing-effect verwijst naar het spreiden van het leren over meerdere sessies, zodat de verworven kennis duurzamer wordt. Het interval

tussen twee leermomenten blijkt ook van invloed te zijn op de efficiëntie van het leerproces. In plaats van leerintervallen met vaste lengte is het efficiënter om met intervallen te leren die met de herhalingen mee expanderen. Dit verschijnsel wordt lag-effect genoemd.

Rodi e.a. [15] genereren leerplannen/routes binnen de netwerkstructuur volgens drie verschillende leerstrategieën. Telkens wordt er volgens een kansproces een nieuwe knoop gekozen uit het deel van het netwerk dat overblijft. Wanneer alle knopen klaar zijn, gaat een stochastisch leerproces van start met de bijbehorende herhaalprocessen (zie kader op de volgende pagina). De drie leerstrategieën zijn als volgt:

*Random leren (RL):* Elke nieuwe knoop  $i$  wordt random geselecteerd met een kans die uniform is verdeeld.

*Preferentiële acquisitie (PA):* Elke nieuwe knoop  $i$  wordt geselecteerd met een kans die evenredig is met de graad  $d_i$  van knoop  $i$ . De knopen met een hoge graad hebben

duis een grotere kans om in aanmerking te komen.

*Random surfen (RS):* Elke nieuwe knoop  $i$  wordt met een kans  $p$  gezocht onder de buurknopen van de laatst geïntroduceerde knoop of er wordt met een kans  $1-p$  een random sprong gemaakt in het netwerk om een andere knoop te selecteren volgens een PA-stap.

Deze leerstrategieën maken geen gebruik van de groepen van een netwerk die belangrijke informatie kunnen bevatten over de context van de knopen. We voegen hieraan een nieuwe leerstrategie toe die onderscheid maakt tussen de buurknopen die uit verschillende groepen afkomstig kunnen zijn. Hierdoor levert elke andere buurknoop mogelijk een andere bijdrage op aan de context van de knoop  $i$ . De bijdrage van een buurknoop  $j$  uit een buurgroep  $q$  wordt gekenmerkt door het product  $w_q m_{pq}$ , waarbij  $w_q$  het aantal knopen in groep  $q$  voorstelt en  $m_{pq}$  het aantal verbindingen tussen de groep  $q$  en de

groep  $p$  waar de knoop  $i$  in zit. Wiskundig gezien houdt dat in dat de centraliteit van de knoop  $i$  niet meer door de graad  $d_i$  (het aantal verbindingen van knoop  $i$ ) wordt gekenmerkt, maar door de gewogen som van de verbindingen. Een dergelijke grootte wordt ook wel de sterkte (strength)  $s_i$  van knoop  $i$  genoemd in plaats van de graad  $d_i$  [22]. De wiskundige beschrijving daarvan ziet er als volgt uit (zie kader hierboven):

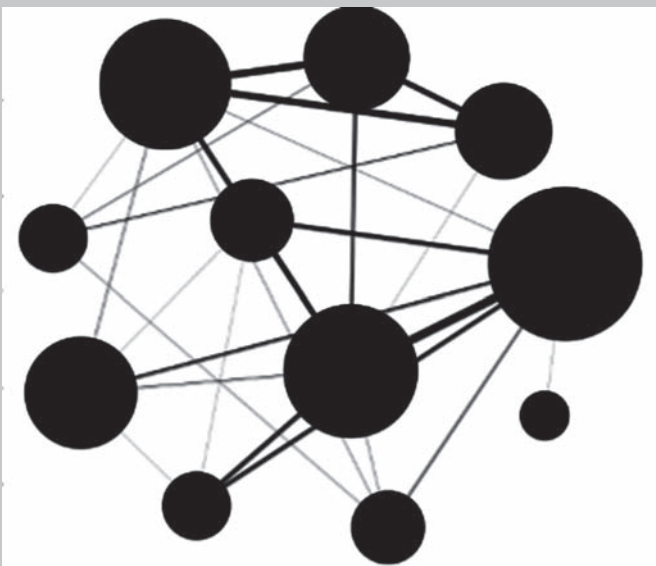
$$s_i = \sum_{q \in M} d_{iq} \tilde{w}_q \tilde{m}_{pq}.$$

Hierin is  $s_i$  de sterkte van knoop  $i$  gebaseerd op de groepsstructuur,  $d_{iq}$  het aantal buurknopen in buurgroep  $q$  én  $\tilde{w}_q$  en  $\tilde{m}_{pq}$  zijn de genormaliseerde versies van  $w_q$  en  $m_{pq}$ .  $M$  is de verzameling van alle groepen in het netwerk.

*Groepsstructuur-gebaseerd leren (GL)* wordt nu als volgt gedefinieerd. Een nieuwe knoop  $i$  wordt geselecteerd met een RS-stap waarbij niet  $d_i$  maar  $s_i$  de kans bepaalt om in aanmerking te komen in de leerroute.

### Groepsstructuur

De groepsstructuur onthult belangrijke informatie over de hiërarchische organisatie van de knopen en beïnvloedt allerlei dynamische processen op het netwerk. Een van de eerste en bekendste methoden om de groepsstructuur in complexe netwerken te vinden maximaliseert de zogenaamde  $Q$ -modulariteit van het netwerk [8]. Elke opdeling in groepen komt overeen met een bepaalde  $Q$ -waarde. Het is bij vele complexe netwerken aangetoond dat opdelingen bij hogere  $Q$ -waarden leiden tot statistisch aanvaardbare resultaten: groepen die intern dichter verbonden



Figuur 5 Groepsstructuur van het wiskunde A-netwerk.

zijn dan met de rest van het netwerk. In dit opzicht overtreft het maximaliseren van  $Q$  alle tot dan bekende traditionele methoden [10]. De  $Q$ -modulariteit wordt uitgedrukt als:

$$Q = \sum_{q=1}^K \frac{L_q}{L} - \left( \frac{d_q}{2L} \right)^2.$$

Hierin is  $K$  het aantal groepen;  $L$ , het totale aantal links in het netwerk en  $L_q$ , het aantal links in groep  $q$ . De parameter  $d_q$  geeft de som van de graden van alle knopen in groep  $q$  aan.

Het karakteriseren van de zogenaamde centraliteit van een knoop ten opzichte van de groepsstructuur is een actief onderzoeksdomein binnen de netwerkwetenschap. Een recente aanpak drukt de centraliteit van een knoop  $u_i$  uit in index  $c_i$  [23]:

$$c_i = \sum_{q \in M} d_{iq} \frac{w_q}{N}.$$

Hierin is  $d_{iq}$  het aantal buurknopen (graad) van knoop  $i$  in groep  $q$ ,  $w_q$  het aantal knopen in groep  $q$ ,  $N$  totale aantal knopen in het netwerk en  $M$  is de verzameling van alle groepen.

Voor gewogen grafen zoals de groepsstructuur van wiskunde A geldt bovendien [22]:

$$s_q = \sum_{p \in M} w_q m_{pq}.$$

Hierin is  $s_q$  de zogenaamde sterkte (strength) van de groep  $q$  en  $m_{pq}$  het aantal tussenverbindingen tussen de groep  $p$  en groep  $q$ .

Om de centraliteit/belangrijkheid van een knoop ten opzichte van de groepsstructuur aan te geven, combineren we deze formules tot:

$$s_i = \sum_{q \in M} d_{iq} \frac{w_q m_{pq}}{N} = \sum_{q \in M} d_{iq} \tilde{w}_q \tilde{m}_{pq}.$$

### Leermodel van de hypothetische leerling

Uitgaande van een verzameling onafhankelijke leereenheden doorloopt de hypothetische leerling een leerplan/leerroute  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$  waarbij elke leereenheid/knoop  $u_i$  opnieuw ‘bezoekt’ kan worden volgens een serie randvoorwaarden. De randvoorwaarden hangen af van het discrete tijdstip  $a_k$  waarop de  $k$ -de introductie van  $u_i$  plaatsvindt en het discrete tijdstip  $b_k$  waarna  $u_i$  vergeten wordt. Als een leereenheid  $u_i$  niet wordt herhaald binnen het gestelde tijdsinterval  $[a_k, b_k]$ , dan is het dus te laat en wordt het vergeten. De grenswaarden van randvoorwaarden  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k]$  met  $a_k \leq b_k$ , waarbij  $k$  een positief geheel getal is, expanderen met de tijd mee zodat  $a_k \leq a_{k+1}$  en  $b_k \leq b_{k+1}$ , overeenkomend met het eerder beschreven lag-effect. De voordelen veranderen in nadelen als de  $(k+1)$ -ste herhaling van item  $u_i$  te laat (na  $b_k$ ) of te vroeg (vóór  $a_k$ ) optreedt.

Uitgaande van deze implementatie van [13] bouwt [15] hierop voort door te stellen dat de leereenheden niet onafhankelijk zijn, maar dat ze een netwerk vormen met de afhankelijkheidsrelaties (verbindingen) tussen de leereenheden. In deze aanpak worden

de grenzen van de randvoorwaarden afhankelijk gemaakt van de sterkte (knowledge strength)  $S_i$  van leereenheid  $u_i$ , zodat  $[a_{S_i(t)}, b_{S_i(t)}]$ . Hierbij is  $S_i$  een index die afhangt van de omgeving/ buurknoten waarmee de knoop  $u_i$  direct verbonden is. Net als bij [13] moeten de twee opeenvolgende voorkomens van dezelfde leereenheid  $u_i$  binnen een bepaald interval  $[a_{S_i(t)}, b_{S_i(t)}]$  optreden. Op elk discreet tijdstip  $t$  wordt er – voor elke leereenheid  $u_i$  onder de  $n(t)$  al verworven leereenheden – de afstand  $\Delta_i t = (t - t_i)$  berekend, waarbij  $t_i$  het laatste moment is waarop de leereenheid  $u_i$  in de leerroute was opgenomen. Als  $\Delta_i t > b_{S_i(t)}$  is, dan wordt  $u_i$  vergeten en daarom in de wachtrij geplaatst van vergeten leereenheden. Als  $\Delta_i t \leq b_{S_i(t)}$  is, dan bepaalt een monotoon stijgende functie  $F_{S_i(t)}(\Delta_i t)$  de kans dat  $u_i$  herhaald wordt:

$$F_{S_i(t)}(\Delta_i t) = \frac{1}{2} \left( \tanh \left( \frac{LR}{b_{S_i(t)}} \left( \Delta_i t - \frac{b_{S_i(t)}}{2} \right) \right) + 1 \right).$$

Hierin staat  $LR$  voor *Learning Rigidity*. Het is een vrije parameter die de helling van de functie  $F_{S_i(t)}(\Delta_i t)$  regelt en dus ook de snelheid waarmee nieuwe leereenheden worden geïntroduceerd.

### Toepassing op het wiskunde A-netwerk

In deze paragraaf passen we de bovenbeschreven leerstrategieën toe op het wiskunde A-netwerk. We evalueren telkens de efficiëntie van het leerproces in termen van het aantal afzonderlijke leereenheden  $n(t)$  dat per discrete tijdstip  $t$  geleerd is en de gemiddelde dekkingstijd  $\langle t \rangle$ . De verkregen resultaten zijn gebaseerd op de realisatie van vijftig simulaties en zijn genormaliseerd met de netwerk grootte  $N$ .

In Figuur 6a is te zien dat de groepsstructuur-gebaseerde leerstrategie GL een kortere dekkingstijd heeft en dus sneller leert dan de overige drie leerstrategieën. De performances van de leerstrategieën worden ook vergeleken met de resultaten die zijn verkregen uit een equivalente verzameling  $N$  volledig-ontkoppelde knopen. In Figuur 6a liggen deze resultaten op de rode kromme met de aanduiding ‘geen net-

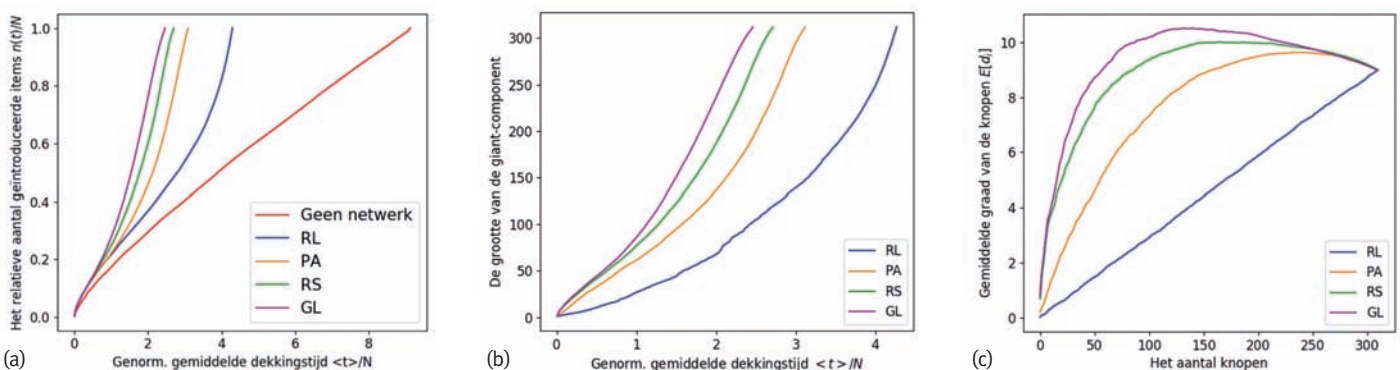
werk’. Het verloop van deze rode kromme komt overeen met de wet van Heap (Heap’s law) voor de onafhankelijke leereenheden. Volgens deze wet geldt  $n(t) \simeq t^\beta$  met  $\beta < 1$  [15]. In ons geval is dat  $n(t) \simeq t^{0.81}$ . Tabel 2 geeft de betrouwbaarheidsintervallen voor de waargenomen dekkingstijden aan. Hierin is te zien dat er een significant verschil is tussen de performances van de leerstrategieën. Hoe kleiner de dekkingstijd van een leerstrategie ten opzichte van het geval ‘geen netwerk’ is, is een indicatie voor hoe efficiënter de afhankelijkheidsrelaties in het netwerk door die leerstrategie worden benut om het leerproces te versnellen, dat wil zeggen versnellen door de kans op inefficiënt herhalen en vergeten te beperken. Tabel 2 laat zien dat deze kans door GL significant beter wordt beperkt.

Om verder in te zoomen op het mechanisme achter de verschillende leerstrate-

gieën hebben we telkens per leerstrategie gekeken naar de ontwikkeling van de zogenaamde *giant-component*: terwijl de hypothetische leerling de leerroute volgt, leidt het leerproces tot het ontstaan van een of meer verbonden componenten. De giant-component is de grootste component, die meestal opvallend groter is dan alle andere componenten. Figuur 6b laat de ontwikkeling zien van de giant-component per leerstrategie. Hier is te zien dat het leerproces met GL steeds een grotere giant-component tot gevolg heeft. Figuur 6c laat zien dat bij GL ook de gemiddelde graad per knoop tijdens dit groeiproces sneller toeneemt.

### Conclusies en verder onderzoek

In dit werk hebben we ons gericht op het ontwikkelen van een semantisch netwerkmodel voor wiskundige kennis, met als



**Figuur 6** Vergelijking van de leerstrategieën. De resultaten zijn gebaseerd op de realisatie van vijftig simulaties: (a) Het relatieve aantal geïntroduceerde knopen  $n(t)/N$  oftewel de snelheid waarmee de nieuwe knopen worden geïntroduceerd. (b) De grootte van de giant-component in termen van het aantal knopen waaruit de giant-component bestaat. (c) De verandering van de gemiddelde graad  $E[d]$  per knoop naarmate de leerprocessen zich voortzetten.

Geen netwerk	RL	PA	RS	GL
[9.124, 9.156]	[4.181, 4.278]	[3.074, 3.109]	[2.683, 2.714]	[2.443, 2.478]

Tabel 2 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor  $\langle t \rangle / N$ .

use case het vwo-vak wiskunde A (examenjaar 2018). We hebben laten zien hoe het wiskunde A-netwerk volgens onze methodiek wordt opgebouwd uit specifieke-toetsbare leerdoelen. Vervolgens hebben we het verkregen netwerk geclassificeerd als scale-free en small-world. Het wiskunde A-netwerk bezit dus eigenschappen die algemeen voorkomen bij complexe netwerken. Voorts hebben we getoond hoe een dergelijk netwerkmodel gebruikt kan worden bij het kwantificeren van de effectiviteit van de leerstrategieën om nieuwe kennis te verwerven. Een belangrijk resultaat is dat groepsstructuur-gebaseerd leren (GL) de kans op het vergeten en inefficiënt herhalen beter beperkt dan andere leerstrategieën en dat het leerproces hiermee sneller gaat. In de onderwijspraktijk komt dat erop neer dat de context van individuele concepten afhankelijk kan zijn van verschillende domeinen en dat de bijdragen van verschillende domeinen aan de centraliteit/belangrijkheid van een individuele concept niet gelijk hoeven te zijn. De kracht van onze aanpak is dat zelfs deze individuele bijdragen aan de context hiermee gekwan-

tificeerd kunnen worden tot een wegingsfactor.

De resultaten zijn gebaseerd op het leren van een hypothetische leerling die, uitgaande van het spacing- en lag-effect, een stochastisch proces doorloopt. Om het uiteindelijke model te valideren is er echte leerdata nodig van de leerling-leer-materiaal-interacties. Het gaat hierbij om zeer grote hoeveelheden interactiedata die alleen door digitale en intelligente leerplatformen bijgehouden kunnen worden. De twee veelgebruikte wiskundemethoden *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* zijn in die richting het hele wiskunde-curriculum stap voor stap, leerjaar voor leerjaar aan het implementeren in hun adaptieve en gepersonaliseerde digitale leerplatformen.

Hoewel het gebruik van semantische netwerkmodellen vaak voorkomt bij het bestuderen van allerlei kennisbronnen, is ons werk — voor zover we weten — het eerste concrete voorbeeld van het vernetwerken van wiskundige kennis op basis van curriculumkenmerken. Hierbij is het belangrijk op te merken dat dit mede mogelijk was dankzij de door CvTE gespecificeerde eindtermen van wiskunde. Even-

als cognitieve schema's kan een dergelijk netwerk in de toekomst nog verder verrijkt worden met de kerndoelen en tussendoelen van het wiskundeonderwijs, wanneer ze ook gespecificeerd worden zoals de eindtermen. De voorgestelde methodiek voor de netwerkconstructie kan ook verder ontwikkeld worden door de specificaties aan te scherpen maar ook aan te vullen met de karakteristieke uitgangspunten van een leerplatform. We bepleiten dat netwerkmodellen een belangrijke rol kunnen spelen bij het vergroten van curriculum-samenhang, het inrichten van doorlopende leerlijnen, bij het ontwikkelen van adaptieve en intelligente leerplatformen en bij het monitoren en bijsturen van het leergedrag in het kader van learning analytics. Wanneer de informatie over hoe een bepaalde content functioneert beschikbaar is, dan kunnen de docenten namelijk op een andere maar efficiëntere manier omgaan met de diversiteit in hun klas door de instructie, oefening en feedback aan te passen aan de persoonlijke behoeften. In dit werk hebben we met behulp van de tools uit de netwerkwetenschap aangetoond dat de karakteristieke groepsstructuur van de content het functioneren van de individuele leerelementen kan beïnvloeden. We hebben een methode gedemonstreerd waarmee deze invloed gekwantificeerd kan worden. ☛

## Referenties

- 1 Syllabus 2018 Wiskunde A, vwo. <https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-a-vwo-2/2018/vwo>.
- 2 R. Albert en A.L. Barabasi, Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics* 74(1) (2002), 47.
- 3 Michael E. Bales en Stephen B. Johnson, Graph theoretic modeling of large-scale semantic networks, *Journal of Biomedical Informatics* 39(4) (2006), 451–464.
- 4 Javier Borge-Holthoefer en Alex Arenas. Semantic networks: Structure and dynamics. *Entropy* 12(5) (2010), 1264–1302.
- 5 J. van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde*, Oosthoek, 1974.
- 6 P. Drijvers, A. van Streun en B. Zwanneveld (red.). *Handboek wiskundendidactiek*, Epsilon Uitgaven, deel 72, 2013.
- 7 E. Folmer, A. Koopmans van Noort en W. Kuiper (red.), *Curriculumspiegel 2017*, <https://slo.nl/@4586/curriculumspiegel-1>.
- 8 S. Fortuna en M. Barthelemy, Resolution limit in community detection, *PNAS* 104(1) (2007), 36–41.
- 9 Trazbulo Henrique, Inacio de Sousa Fadigas, Marcos Grilo Rosa en Hernane Borges de Barros Pereira, Mathematics education semantic networks, *Social Network Analysis and Mining* 4 (2014), 1–9.
- 10 M.E.J. Newman, Modularity and community structure in networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(23) (2006), 8577–8582.
- 11 M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Review* 45(2) (2003), 167–256.
- 12 V. Nicosia, R. Criado, M. Romance, G. Russo en V. Latora, On the properties of small-world network models, *Nature Scientific Reports* 2 (2012), 218.
- 13 T.P. Novikoff, J.M. Kleinberg en S.H. Strogatz, Education of a model student, *PNAS* 109(6) (2012), 1868–1873.
- 14 H.B.B. Pereira, I.S. Fadigas, V. Senna en M.A. Moret, Semantic networks based on titles of scientific papers, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390(6) (2011), 1192–1197.
- 15 G.C. Rodi, V. Loreto, V.D.P. Servedio en F. Tria, Optimal learning paths in information networks, *Nature Scientific Reports* 5(1286) (2015).
- 16 R. Skemp, *Wiskundig denken*, Aula 501, 1971.
- 17 C. Stegehuis, Netwerken met groepsstructuren, *NAW* 5/19(2) (2018), 97–100.
- 18 Remco van der Hofstad, Random networking: between order and chaos, *NAW* 5/8(1) (2007), 18–24.
- 19 Duncan J. Watts en Steven H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature* 393 (1998), 440–442.
- 20 Christian Weber, *Creating a Concept Importance Measure for Domain Knowledge in the Context of Learning*, PhD thesis, Budapesti Corvinus Egyetem, 2017.
- 21 Karen E. Willcox en Luwen Huang, Network models for mapping educational data, *Design Science* 3 (2017), e18.
- 22 D.C. Zemp, M. Wiedermann, J. Kurths, A. Rammig en J.F. Donges, Node-weighted measures for complex networks with directed and weighted edges for studying continental moisture recycling, *Europhysics Letters* 107(5) (2014), 58005.
- 23 Zhiying Zhao, Xiaofan Wang, Wei Zhang en Zhiliang Zhu, A community-based approach to identifying influential spreaders, *Entropy* 17(4) (2015), 2228–2252.